球の充填問題 (数学史の研究)

数理解析研究所講究録
1130巻 2000年 1-7

球の充塡問題

一松　信　　(Sin HITOTUMATU)
東京電機大学鳩山校舎

1．要旨

球の充塡問題とは、合同な多数の球をなるべく密に詰込む問題であり、Hilbertの第18問題（の一部）にも取上げられている。枠を決めて何個入るかといった変形も多数あるが、ここでは無限空間内の本来の問題、特に接触数問題と密度問題に限って述べる。

これは古くから多数の研究がある問題であり、少しよく調べると「俗説」の誤りも多数ある。この方面の初心者である私にとっては、「数学史研究」の難しさを身にしみて感じた体験だった。

2．接触数問題

2．1　定義と古典的な結果

接触数(Kissing Number)とは、ｎ次元ユークリッド空間の中で、一つの中心球Ｓの周りに同じ大きさの多数の剛体球を、すべてＳに接するように最大何個配置できるか？という問題である。

英語のKissという語は撞球の用語からきている。 n=1 (2),n=2 (6)ー括弧内は最大接触数ーは自明だが、その他最大接触数が既知なのは n=3 (12),n=8 (240),n=24 (196560) だけである（後述）。n=3 以外はすべて最大接触数を与える配置が一意的（厳密にいうと鏡像的配置を同じとみなして）であるために、それが最大数であることが証明できる。

多くの次元数 ｎについては、既知の最大接触数を与える配置が、整然とした周期的な格子だが、次元によっては非格子的（アモルファス）な配置の方が、局所的には格子状配列よりも大きい値を与えることがある。ーこのように次元数ｎによって著しく様相が違うところが、面白くもありまた難しい理由でもある。

2．2　３次元の場合；13球の問題

３次元の接触数について、1670年代にNewtonとGregory との大論争があった。

Newtonは「立方八面体」（面心立方格子）を考えて、12個が限度であり、そのことを厳密に証明すればよいと主張した。これに対してGregory は正20面体を考えていた。

正20面体の外接球の半径ｒは、その一辺の長さａより僅かに短い。ー $r/a=\cos 18^\circ$である。ー　したがって中心球Ｓの周りに12個の球を、各接点が正20面体の頂点をなすように配置すれば、その間に隙間があく。球をうまく片寄らせればもう１個分の空ができるのではないか？ー　もっとも彼がそれを実際にやって見せたわけではない。

この問題は永らく未解決だった。ーいまでも本当に解決されたのかどうか疑っている人がいるらしい。

多くの本に「これは1874年にBender,Günther,Hoppeが証明した」とある。私もそう書いたことがある。しかしこれは誤りだった。

Bender[2]は問題を再提出しただけだった。Günther[5]は立体角を計算して、13個よりも多くは置けないことを示したが、肝心の13個置けないことには触れていない。

Hoppe[7]だけは12個が最大であることを証明しようと努力したが、彼の「証明」は今日では不完全と判定されている。彼は12個の球の接触点を結んで球面の三角形分割を作ろうとしたが、彼の操作は五角形状の配列には適用できないことがわかった。

12個の配列を考え、その隙間の面積を評価して、まとめて1個分に足りないことを証明しようとした論文もあるが、決められた形の隙間が重複する場合があり、正しい評価になっていなかった。

2．3　13球の問題の解決

結局この問題の最初の正しい証明は、普通には「容易に見ることができて比較的簡単な証明」といわれている1953年の Schütte-van der Waerdenの論文[13]らしい。後に Leech [11]がさらに「初等的な」証明を与えた。

その考え方は発想を転換して中心球を除き、空間に13個のベクトル（球の中心）x_i を、ノルムが1以上かつ相互の距離も1以上という制約条件を付けて配置し、そのノルムの和 sを最小にするという一種の非線形計画法の問題にする。sが13にできれば13個置けたことになるが、sの下限が13より真に大きければ、13個は置けないことが証明される。

その真の下限値が未知という意味で「未解決」といえないこともないが、上記2論文の評価（下限は13よりも大きい）は正しいようである。したがって最大接触数は12である。一見動かしようがない立方八面体も、うまくひねると正20面体に変形でき、接触数12の配置が連続無限個あるのが、問題を難しくしている。

2．4　高次元の場合

n=4 のときには、D4 格子(4次元の体心立方格子）という極めて密な格子があり、それによる接触数は24である。これが最大と予想されているが、立体角による評価では25以下であって、25個置けないことが証明されていない。一証明したと称する論文もあるが、不備が指摘されている。しかし（楽観的かもしれないが）3次元のときと同様の方法で、証明できる可能性がある。コンピュータによるモンテカルロ的な実験もあるらしい。

n=8 のときにはE8 格子、n=24のときには Leech格子という極めて密な格子があり、それらが最大接触数を与える。この名は後者は人名である。前者は（D4 も同様）単純Lie群のルート系から生成されるので、対応するLie 群の名を転用したものである。24次元までの格子状の最大接触数を与える格子は、すべてLeech 格子を1次元ずつ切って次元を下げて得られる格子である。([12])

24より大きい次元数については、近年多くの発展があったものの、特別なnの値について断片的に知られているだけといってよい。

当初 Leech格子についても解説する予定だったが、これは「数学」の話であって「数学史」とは縁が遠いので省略する。但しその構成には多くの方法が知られており、最近では4進コードによる簡単な方法も発表されている（[3]）。

参考までに付録に、Conway-Sloanの本（改訂増補版）から取った、最大接触数の最新データ表を載せた。

3．密度問題　　3．1　問題と古典的な結果

密度問題とは、n次元空間の広い領域Vに多数の単位球を詰込み、Vを全空間に広げたときの　球の体積合計／Vの体積　の極限値Δ（密度）の最大値（及びそれを実現する配置）を求める問題である。

$n=2$のときは正三角形状の配置（A2 格子）が最大を与え、$\Delta=\pi/\sqrt{12}=0.9069...$である。$n=3$のとき面心立方格子が最大値$\Delta=\pi/\sqrt{18}=0.74048...$を与えるだろうというのが、有名なKeplerの予想である（後述）。

密度の値自体は$n\to\infty$のとき0に近づくが、その値はπの累乗を含む複雑な無理数なので扱い難い。そのためにそれを単位球の体積で割った中心密度δを使うことが多い。この値δは単位体積あたりの球の平均中心数を表す。これは$n\to\infty$のとき全体としては∞に近づく傾向を示すが、nによってかなり大小があり、$n\to\infty$とした漸近的な挙動だけで済む話ではない。

格子状の配列だけならば、2次形式の極値問題になる。しかしこの場合も次元数nによっては、必ずしも整然とした格子状の配列よりも、非格子状の配置のほうが高い密度を与える場合もあるので話が難しい。

3．2　Keplerの予想

3次元の場合、面心立方格子（A3 格子）が最密だろうというのは自然な予想だが、未解決の難問である。密度を上から評価した結果では、0.7796... が永らく記録であり、近年になって0.7784... に改良されたという。

格子状配列に限れば、1831年に Gauss[4]が解決したと伝えられている。これに関する調査を一言する。

東京電機大学（鳩山校舎）に、故田村一郎教授が寄贈して下さった Gauss全集全巻がある。論文[4]はフライブルグの物理学Seeber教授宛の、ドイツ語の手紙である。

その内容は3変数の2次形式の標準化と、正定符号であるための条件を論じたもので、今日では線形代数の初歩にすぎない。その最後に結晶学などへの応用として、極値問題を述べている。それを現代流に翻訳して証明をつければ、格子に関するKepler予想の肯定的な解決になる。

数学史の問題としては、第一に Gaussが球の密度問題を意識して述べたのか、第二にこの手紙が当時関係者に知られていたか、である。これらについては更に調査を要するが、私の現在の判断は以下の通りである。

第一の点は、まずこの手紙自体が質問の解答のようである。そして「結晶学への応用」という語が、問題意識を暗示していると思う。

第二の点は、後に同じような証明を発表し、さらに4次元に拡張した論文の多く（例えば[10]）が「1831年 Gauss」と記述しているので、関係者の間には噂が広まっていたと推察される。したがって「1831年に Gaussが解決した」という伝統的な説は、たとえこの手紙が当時公表されたものではなかったとしても、正しいと判断してよさそうである。

3．3　Hsiangの結果

Kepler予想及び13球の問題など、一連の結果が1992/3年にバークレイの中国系米国人であるHsiang[8]によって解決されたと報ぜられ、一時評判になった。しかしその「証明」には重大な欠陥があったらしい。Math. Reviews での紹介はもちろん、Hales[6] の酷評がある。Hsiangの再反論[9]もあるが、それらの紹介は省略する。 Halesの論文はこの方面の絶好の入門解説である。

Hales はもともと保型形式の専門家だったが、Hsiangとの論争から球の充塡問題にのめり込み、1998年8月についにKepler予想を解決したというプレプリントを発表した（Conway-Sloanの本[1]の増補記事による）。その詳細は未知であり、論文がどこに発表されるのかも調べていない。ここ数年来彼が発表してきた一連の成果からみて、「今度こそ本当に解決された」という感じだが、当面判定を保留する（私の怠慢のため）。もし正しければ、20世紀の内に解決したことを喜びたい。

3．4　高次元の場合

4次元の場合は、1872年に Korkine-Zolotalëv[10]が、格子状の配列に限れば、D4 格子によってえられる$\Delta = \pi^2/16=0.6069...$が最大なことを証明した。一般の配列については未解決だが、3次元のときと同様にして証明できる可能性がある。

それ以上の次元では、ほとんど何もわかっていない状況である。前記の本[1]の増補部分から、最新の成果を別表に示した。次元によっては非格子状の配列のほうが密になる場合も多い。

4．　むすび

以上の紹介は、ごく表面を撫でただけである。この問題は、符号系・デザイン・有限群など、離散数学の諸問題と深く掛わっている。特に Leech格子とその構成に不可欠なGolay符号系については、歴史を併せて調査したい。私にとっては冒頭にも述べた通り、数学史研究の真似事をして、難しさを痛感した体験であった。

注：　別表1は接触数、2は密度に関する最新データ。
　　いずれもConway-Sloan[1]の増補部分による。

参考文献

全体として：

[1] J.H.Conway - N.J.A.Sloane, Sphere Packing, Lattices and Groups, Springer Verlag, 1993, revised third ed. 1999.

個々の論文：

[2] C.Bender, Bestimmung der grössten Anzahl gleich Kugeln, welche sich auf eine Kugel von demselben Radius, wie die übrigen,anflegen lassen, Archiv Math. Phys. (Gunert), 56 (1874), p.302-306.

[3] P.G.Bonneau - P.Solé, Quaternary constructions of formally self-dual binary codes and unimodular lattices, Algebraic Coding, Lecture Notes on Comp. Sci., 781, Springer, 1994, p.194-205.

[4] C.F.Gauss, Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven termaren quadratischen Formen usw., Göttingensche Gelehrte Anzeigen, Werke II (1876), p.188-196.

[5] S.Günther, Ein stereometrisches Problem, Archiv Math, Phys. (Gunert), 57 (1875), p.209-213.

[6] T.C.Hales, The Status of the Kepler conjecture, Math. Intelligencer,Springer 16 (3), 1994, p.47-58.

[7] R.Hoppe, Bemerkung der Redaction, Archiv Math. Phys.(Gunert), 56(1874), p.307-312.

[8] W.Y.Hsiang, On the sphere packing problem and the proof of Kepler's conjecture, Differential Geometry and Topology, Algebras, 1992, World Scientific, 1993, p.117-127.

[9] W.Y.Hsiang, A rejoinder to Hales's article, Math. Intelligencer, Springer 17(1), 1995, p.35-42.

[10] A.Korkine - G.Zolotalëv, Sur les formes quadratique positive quatternière, Math. Ann., 56 (1872), p.581-583.

[11] J.Leech, The problem of the thirteen spheres, Math. Gazette, 40 (1956), p.22-23.

[12] J.Leech, Some sphere packings in higher space, Camb. Math. J. 16 (1964), p.657-682.

[13] K.Schütte - B.L. van der Waerden, Das Problem der dreizehn Kugeln, Math. Ann., 125 (1953), p.325-334.

付録1. 接触数

Table 1.2(a) Highest kissing numbers τ presently known for packings in dimensions $n \leq 128$.

n	τ (lattice)	τ (nonlattice)	Lattice (nonlattice)
0	0		Λ_0
1	2		$\Lambda_1 \cong A_1 \cong \mathbb{Z}$
2	6		$\Lambda_2 \cong A_2$
3	12		$\Lambda_3 \cong A_3 \cong D_3$
4	24		$\Lambda_4 \cong D_4$
5	40		$\Lambda_5 \cong D_5$
6	72		$\Lambda_6 \cong E_6$
7	126		$\Lambda_7 \cong E_7$
8	240		$\Lambda_8 \cong E_8$
9	272	(306)*	Λ_9 (P_{9a})*
10	336	(500)*	Λ_{10} (P_{10b})*
11	438	(582)*	$\Lambda_{11}^{\max}$ (P_{11c})*
12	756	(840)*	K_{12} (P_{12a})*
13	918	(1130)*	K_{13} (P_{13a})*
14	1422	(1582)*	Λ_{14} (P_{14b})*
15	2340		Λ_{15}
16	4320		Λ_{16}
17	5346		Λ_{17}
18	7398		Λ_{18}
19	10668		Λ_{19}
20	17400		Λ_{20}
21	27720		Λ_{21}
22	49896		Λ_{22}

*The kissing number in a nonlattice packing may vary from sphere to sphere – we give the largest value (see Table 1.2)

Table 1.2(b) Highest kissing numbers τ presently known for packings in dimensions $n \leq 128$.

n	τ (lattice)	τ (nonlattice)	Lattice (nonlattice)
23	93150		Λ_{23}
24	196560		Λ_{24}
25	196656		Λ_{25}
26	196848		Λ_{26}
27	197142		Λ_{27}
28	197736		Λ_{28}
29	198506		Λ_{29}
30	200046		Λ_{30}
31	202692		Λ_{31}
32	261120	(276032)*	Q_{32} and others ([EdRS98])
33	262272	(294592)*	Q_{33} ([EdRS98])
34	264576	(318020)*	Q_{34} ([EdRS98])
35	268032	(370892)*	Q_{35} ([EdRS98])
36	274944	(438872)*	Q_{36} ([EdRS98])
37	284160	(439016)*	Q_{37} ([EdRS98])
38	302592	(566652)*	Q_{38} ([EdRS98])
39	333696	(714184)*	Q_{39} ([EdRS98])
40	399360	(991792)*	Q_{40} ([EdRS98])
44	2708112	(2948552)*	MW_{44} ([EdRS98])
48	52416000		P_{48n}, P_{48p}, P_{48q}
64	138458880	(331737984)*	Ne_{64} [Nebe98b] ([EdRS98])
80	1250172000	(1368532064)*	L_{80} [BacoN98] ([EdRS98])
128	218044170240	(8863556495104)*	MW_{128} [Elki] ([EdRS98])

*The kissing number in a nonlattice packing may vary from sphere to sphere – we give the largest value (see Table 1.2)

付録2 密度

Table I.1(a) Densest packings presently known in dimensions $n \le 128$. The table gives the center density δ, defined on page 13.

n	δ (lattice)	δ (nonlattice)	Lattice (nonlattice)
0	0		Λ_0
1	$1/2=0.50000$		$\Lambda_1 \cong A_1 \cong \mathbf{Z}$
2	$1/2\sqrt{3}=0.28868$		$\Lambda_2 \cong A_2$
3	$1/4\sqrt{2}=0.17678$		$\Lambda_3 \cong A_3 \cong D_3$
4	$1/8=0.12500$		$\Lambda_4 \cong D_4$
5	$1/8\sqrt{2}=0.08839$		$\Lambda_5 \cong D_5$
6	$1/8\sqrt{3}=0.07217$		$\Lambda_6 \cong E_6$
7	$1/16=0.06250$		$\Lambda_7 \cong E_7$
8	$1/16=0.06250$		$\Lambda_8 \cong E_8$
9	$1/16\sqrt{2}=0.04419$		Λ_9
10	$1/16\sqrt{3}=0.03608$	$(5/128 = 0.03906)^*$	Λ_{10} $(P_{10c})^*$
11	$1/18\sqrt{3}=0.03208$	$(9/256 = 0.03516)^*$	K_{11} $(P_{11a})^*$
12	$1/27=0.03704$		K_{12}
13	$1/18\sqrt{3}=0.03208$	$(9/256 = 0.03516)^*$	K_{13} $(P_{13a})^*$
14	$1/16\sqrt{3}=0.03608$		Λ_{14}
15	$1/16\sqrt{2}=0.04419$		Λ_{15}
16	$1/16=0.06250$		Λ_{16}
17	$1/16=0.06250$		Λ_{17}
18	$1/8\sqrt{3}=0.07217$	$(3^9/4^9 = 0.07508)^*$	Λ_{18} ($\mathcal{B}^*_{18}$ [BiEd98])*
19	$1/8\sqrt{2}=0.08839$		Λ_{19}
20	$1/8=0.12500$	$(7^{10}/2^{31} = 0.13154)^*$	Λ_{20} ($\mathcal{B}^*_{20}$ [Vard95])*
21	$1/4\sqrt{2}=0.17678$		Λ_{21}
22	$1/2\sqrt{3}=0.28868$	$(0.33254)^*$	Λ_{22} ($\mathcal{A}^*_{22}$ [CoSl96])*
23	$1/2=0.50000$		Λ_{23}
24	1		Λ_{24}
25	$1/\sqrt{2}=0.70711$		Λ_{25}
26	$1/\sqrt{3}=0.57735$		Λ_{26}, T_{26} (see Notes on Chap. 18)

*Nonlattice packing.

Table I.1(b) Densest packings presently known in dimensions $n \le 128$. The table gives the center density δ, defined on page 13.

n	δ (lattice)	δ (nonlattice)	Lattice (nonlattice)
27	$1/\sqrt{3}=0.57735$	$(1/\sqrt{2} = 0.70711)^*$	$\mathcal{B}_{27}$ ($\mathcal{B}^*_{27}$ [Vard98])*
28	$2/3=0.66667$	$(1)^*$	$\mathcal{B}_{28}$ ($\mathcal{B}^*_{28}$ [Vard98])*
29	$1/\sqrt{3}=0.57735$	$(1/\sqrt{2} = 0.70711)^*$	$\mathcal{B}_{29}$ ($\mathcal{B}^*_{29}$ [Vard98])*
30	$3^{13.5}/2^{22}=0.65838$	$(1)^*$	$\mathcal{Q}_{30}$ ($\mathcal{B}^*_{30}$ [Vard98])*
31	$3^{15}/2^{23.5}=1.20952$		$\mathcal{Q}_{31}$
32	$3^{16}/2^{24}=2.56578$		$\mathcal{Q}_{32}$ and others
33	$3^{16.5}/2^{25}=2.22203$		$\mathcal{Q}_{33}$ [Elki94], [Elki]
34	$3^{16.5}/2^{25}=2.22203$		$\mathcal{Q}_{34}$ [Elki94], [Elki]
35	$2\sqrt{2}=2.82843$		$\mathcal{B}_{35}$ (p. 234)
36	$2^{18}/3^{10}=4.43943$		Ks_{36} [KsP92]
37	$4/\sqrt{2}=5.65685$		$\mathcal{D}_{37}$
38	8		$\mathcal{D}_{38}$
39	$3^{16}/2^{20}\sqrt{14}=10.9718$		From P_{48p}, see p. 167
40	$3^{17}/2^{22.5}=21.7714$		From P_{48p}, see p. 167
41	$3^{17}/2^{21.5}=43.5428$		From P_{48p}
42	$3^{18}/2^{22}=92.3682$		From P_{48p}
43	$3^{19}/2^{22.5}=195.943$		From P_{48p}
44	$3^{20}/2^{23}=415.657$	$(17^{22}/2^{43}3^{24} = 472.799)^*$	From P_{48p} ($\mathcal{A}_{44}$ [CoSl96])*
45	$3^{21}/2^{23.5}=881.742$	$(17^{22.5}/2^{44}3^{24} = 974.700)^*$	From P_{48p} ($\mathcal{A}_{45}$ [CoSl96])*
46	$3^{21.5}/2^{23}=2159.82$	$(13^{23}/3^{46.5} = 2719.94)^*$	From P_{48p} ($\mathcal{A}_{46}$ [CoSl96])*
47	$3^{23}/2^{24}=5611.37$	$(35^{23.5}/2^{70}3^{24} = 5788.81)^*$	From P_{48p} ($\mathcal{A}_{47}$ [CoSl96])*
48	$3^{24}/2^{24}=16834.1$		P_{48n}, P_{48p}, P_{48q}
54	$2^{15.88}$		MW_{54}
56	$1.5^{28}=2^{16.38}$		$L_{56,2}(M)$, $\bar{L}_{56,2}(M)$ [Nebe98]
64	$3^{16}=2^{25.36}$		Ne_{64} [Nebe98], [Nebe98b]
80	$2^{40.14}$		MW_{80}
128	$2^{97.40}$		MW_{128}

*Nonlattice packing.